JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 57, 306–321 (1989)

Geometrische Konvergenz bei der Überlappungsapproximation auf $[0, \infty[$*

THOMAS RIESSINGER

Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Mannheim, D-6800 Mannheim, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received August 28, 1987

We introduce a new method to approximate continuous mappings on $[0, \infty[$. We are especially interested in necessary and sufficient conditions for geometric convergence to zero of the sequence of least deviations. These conditions depend on the rate of growth of entire functions and on the degression of continuous mappings $f(t)$ for $t \to \infty$. © 1989 Academic Press, Inc.

1. EINFÜHRUNG

Für eine positiv definite und hermitesche Matrix A führt die Differentialgleichung $y' + Ay = 0$, bzw. ihre Lösungsfunktion $y(t) = e^{-At}y_0$, $y_0 \in \mathbb{C}^m$, zu dem Problem, die Matrix e^{-At} für $t \geqslant 0$ möglichst einfach zu berechnen. Die bekannte Methode der rationalen Approximation hat dabei den Nachteil, dass für $p \in \Pi_n$ die Matrix $p(A)$ invertiert werden muss, was mit hohem Aufwand verbunden sein kann. Wir wollen deshalb ein Verfahren vorstellen, in dem dieser Nachteil vermieden wird. Ziel ist es, für eine Abbildung $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ die Matrixfunktion $f(At)$ durch eine einfachere matrixwertige Abbildung zu approximieren (zum Begriff der Matrixfunktion vgl. man [1]). Dazu seien $k \in \mathbb{N}$ und $0 < m < M$ so gewählt, dass Spectrum$(A) \subseteq [m, M]$. Man setze $\rho = M/m > 1$. Wir definieren für $\eta \geqslant 0$:

$$J_1(\eta) = [0, \eta/M],$$
$$J_m(\eta) = [\eta/M\rho^{m-2}, \eta/M\rho^{m-1}] \qquad \text{für} \quad 2 \leqslant m \leqslant k$$

und

$$J_{k+1(\eta)} = [\eta/M\rho^{k-1}, \infty[.$$

* Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse meiner Dissertation, Universität Mannheim, 1987.

0021-9045/89 $3.00

Setzen wir weiterhin

$$I_1(\eta) = [0, \eta],$$
$$I_m(\eta) = [\eta\rho^{m-3}, \eta\rho^{m-1}] \qquad \text{für} \quad 2 \leqslant m \leqslant k$$

und

$$I_{k+1}(\eta) = [\eta\rho^{k-2}, \infty[,$$

so zeigt man leicht, dass für ein reelles Polymon p und $1 \leqslant m \leqslant k+1$ gilt:

$$\sup_{t \in J_m(\eta)} \|f(At) - p(At)\|_2 \leqslant \|f - p\|_{I_m(\eta)},$$

wobei wir unter $\|\cdot\|_2$ die Spektralnorm und unter $\|\cdot\|_I$ die Maximumnorm auf I verstehen.

Ist daher p eine Approximation an f auf $I_m(\eta)$, so kann man $p(At)$ als approximierende Funktion an $f(At)$ auf $J_m(\eta)$ verwenden und erhält über skalare Methoden Abschätzungen für die Fehlerfunktion. Bezeichnen wir nun die Minimalabweichung von f bezüglich Π_n auf I mit $E_n(f, I)$, so führt die Variation des Parameters η zu der folgenden Definition.

DEFINITION 1. Es seien f: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\rho > 1$.

(i) Für $\eta \geqslant 0$ sei $d^{(n)}_{m,\rho}(f, \eta) = E_n(f, I_m(\eta))$, falls $1 \leqslant m \leqslant k$ und

$$\begin{aligned} d^{(n)}_{k+1,\rho}(f, \eta) &= d_{k+1,\rho}(f, \eta) \\ &= E_0(f, I_{k+1}(\eta)). \end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$a^{(n)}_{k,\rho}(f, \eta) = \max_{1 \leqslant m \leqslant k+1} d^{(n)}_{m,\rho}(f, \eta).$$

(ii) Als Minimalabweichung von f auf $[0, \infty[$ bezüglich ρ, k und Π_n bezeichnen wir die Größe

$$a^{(n)}_{k,\rho}(f) = \inf_{\eta \geqslant 0} a^{(n)}_{k,\rho}(f, \eta).$$

Wir untersuchen in dieser Arbeit die Frage, unter welchen Bedingungen die Folge der Minimalabweichungen geometrisch gegen 0 konvergiert. In Abschnitt 2 wird sich zeigen, dass—im Gegensatz zur Polynomapproximation auf kompakten Intervallen—hier die geometrische Konvergenzgeschwindigkeit die bestmögliche ist. Abschnitt 3 gibt dann zunächst eine hinreichende Bedingung für geometrische Konvergenz. Ist nämlich f

Restriktion einer ganzen Funktion endlicher Ordnung mit der Eigenschaft, dass für $t \to \infty$ $f(t)$ in der gleichen Ordnung exponentiell konvergiert, so ist f geometrisch approximierbar. Umgekehrt zeigen wir, dass jede geometrisch approximierbare Funktion Restriktion einer ganzen Funktion von endlicher Ordnung ist, die für $t \to \infty$ exponentiell konvergiert, wobei wir die Gleichheit der Ordnungen nicht beweisen können. Schliesslich geben wir eine Charakterisierung geometrisch approximierbarer Abbildungen an, die nicht mit Ordnungsaussagen zusammenhängt.

2. Untere Schranken der Konvergenzgeschwindigkeit

Wit nennen f: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ zulässig, falls f stetig ist und $\lim_{t \to \infty} f(t)$ im Reellen existiert. Für $\rho > 1$ zeigt man dann leicht:

Satz 1. *Für eine Abbildung* f: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ *sind äquivalent*:

(i) $\lim_{n \to \infty} a_{1,\rho}^{(n)}(f) = 0$;

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_{k,\rho}^{(n)}(f) = 0$ *für beliebiges* $k \in \mathbb{N}$;

(iii) f *ist zulässig.*

Weiterhin erhält man stets eine optimale Segmentierung.

Satz 2. *Für zulässiges* f, $k, n \in \mathbb{N}$ *und* $\rho > 1$ *gibt es ein* $\eta_n \geqslant 0$ *mit* $a_{k,\rho}^{(n)}(f) = a_{k,\rho}^{(n)}(f, \eta_n)$.

Beweisidee. Falls $a_{k,\rho}^{(n)}(f) = E_0(f, [0, \infty[)$ setze man $\eta_n = 0$. Sonst wähle man ein $c > 0$ mit

$$a_{k,\rho}^{(n)}(f) + c < E_0(f, [0, \infty[).$$

Durch Widerspruchsbeweis kann man zeigen, dass die Menge

$$M_n = \{\eta \geqslant 0; a_{k,\rho}^{(n)}(f, \eta) \leqslant a_{k,\rho}^{(n)}(f) + c\}$$

beschränkt ist, woraus leicht die Behauptung folgt.

Wir geben nun die natürliche Definition.

Definition 2. Es seien f zulässig, $\rho > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) = (a_{k,\rho}^{(n)}(f))^{1/n}$ und nennen f k-fach geometrisch approximierbar (bezüglich ρ), wenn gilt

$$\limsup_{n \to \infty} \alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) < 1.$$

Aus technischen Gründen wird es notwendig sein, das Verhalten einer ganzen Funktion auf bestimmten Ellipsen zu betrachten, die für Spezialfälle schon in [3] definiert wurden.

DEFINITION 3. Es seien $s>1$ und $b>a$. Wir definieren eine Ellipse $\mathscr{E}(a, b, s)$ durch

$$x+iy \in \mathscr{E}(a, b, s), \text{ falls}$$
$$\frac{(2x-b-a)^2}{(1/2(b-a)(s+1/s))^2}+\frac{(2y)^2}{(1/2(b-a)(s-1/s))^2} \leqslant 1.$$

Ist zusätzlich f eine ganze Funktion, so setzen wir

$$M_f(r, s) = \max_{z \in \mathscr{E}(0, r, s)} |f(z)|.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir für zulässiges f stets $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ voraus und definieren eine Maximumfunktion durch $m_f(r) = \max_{t \geqslant r} |f(t)|$. Setzen wir nun für $\rho > 1$ $M(\rho) = (\sqrt{\rho}+1)/(\sqrt{\rho}-1) > 1$, so gilt:

SATZ 3. *Es sei f nicht-konstant und zulässig sowie $k \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) \geqslant (1/M(\rho)) \cdot (1/M(\rho+1))^{k-1} > 0.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k. Sei also zunächst $k=1$. Wir nehmen an, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_{1,\rho}^{(n)}(f) < 1/M(\rho). \tag{X}$$

Man wähle eine Folge (η_n) mit

$$a_{1,\rho}^{(n)}(f) = a_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta_n).$$

Da f nicht-konstant ist, ist bei hinreichend großem n $\eta_n > 0$. Wegen (X) gibt es eine Teilfolge (n_m) von (n) und ein $w > M(\rho)$ mit

$$a_{1,\rho}^{(n_m)}(f, \eta_{n_m}) \leqslant w^{-n_m} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Sei nun für ein festes m $n = n_m$ und p_n die beste Approximation an f auf $[0, \eta_n]$ bezüglich Π_n. Dann ist für $t \in [0, \eta_n]$

$$|f(t) - p_n(t)| \leqslant a_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta_n) \leqslant w^{-n}.$$

Weiterhin gilt für $t \geqslant \eta_n/\rho$: $|f(t)| \leqslant 2w^{-n}$. Für $\eta_n/\rho \leqslant t \leqslant \eta_n$ erhalten wir

$$|p_n(t)| \leqslant |p_n(t) - f(t)| + |f(t)| \leqslant 3w^{-n}.$$

Setzt man für $t \in [-1, 1]$

$$u_n(t) = p_n(\eta_n/2((1-1/\rho)t + 1 + 1/\rho)),$$

so ist $u_n \in \Pi_n$ und $|u_n(t)| \leqslant 3w^{-n}$ für $t \in [-1, 1]$. Wir wählen ein $s > 1$ mit $M(\rho) < s < w$. Nach [2, S. 85] ist dann für $z \in \mathscr{E}(-1, 1, s)$ $|u_n(z)| \leqslant 3(s/w)^n$, bzw.: $|p_n(\eta_n/2((1-1/\rho)z + 1 + 1/\rho))| \leqslant 3(s/w)^n$. Durch Nachrechnen sieht man, dass genau dann $z \in \mathscr{E}(-1, 1, s)$ gilt, wenn

$$\eta_n/2((1-1/\rho)z + 1 + 1/\rho) \in \mathscr{E}(\eta_n/\rho, \eta_n, s),$$

woraus folgt, dass $|p_n(z)| \leqslant 3(s/w)^n$ für $z \in \mathscr{E}(\eta_n/\rho, \eta_n, s)$. Wegen $s > M(\rho)$ ist $1/2(s + 1/s) > (\rho+1)/(\rho-1)$ und damit $0 \in E(\eta_n/\rho, \eta_n, s)$.

Wegen $s + 1/s > 2$ ist aber $\eta_n \in \mathscr{E}(\eta_n/\rho, \eta_n, s)$ und es folgt

$$[0, \eta_n] \subseteq \mathscr{E}(\eta_n/\rho, \eta_n, s).$$

Also gilt $|p_n(t)| \leqslant 3(s/w)^n$ für alle $t \in [0, \eta_n]$. Ersetzt man wieder n durch n_m, so findet man für $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant t \leqslant \eta_{n_m}$:

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leqslant |f(t) - p_{n_m}(t)| + |p_{n_m}(t)| \\ &\leqslant w^{-n_m} + 3(s/w)^{n_m} \leqslant 4(s/w)^{n_m}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I. $\lim_{m \to \infty} \eta_{n_m} = \infty$. Dann sei $t \geqslant 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\eta_{n_m} \geqslant t$ für alle $m \geqslant m_0$. Folglich gilt: $|f(t)| \leqslant 4(s/w)^{n_m}$, falls nur $m \geqslant m_0$, das heisst $f = 0$, im Widerspruch zur Nicht-Konstantheit von f.

Fall II. $\eta = \liminf_{m \to \infty} \eta_{n_m} < \infty$. Dann ist $f_{|[\eta/\rho, \infty[} = 0$ und in Analogie zu Fall I zeigt man, dass $f_{|[0, \eta/\rho]} = 0$ gilt, woraus ein Widerspruch folgt.

Damit ist der Fall $k = 1$ gezeigt; die Behauptung gelte nun für ein festes k. Wir nehmen an, dass

$$\liminf_{n \to \infty} \alpha_{k+1,\rho}^{(n)}(f) < (1/M(\rho)) \cdot (1/M(\rho+1))^k.$$

Man wähle $\eta_n \geqslant 0$ mit $a_{k+1,\rho}^{(n)}(f) = a_{k+1,\rho}^{(n)}(f, \eta_n)$. Es gibt dann ein $w > M(\rho) \cdot M(\rho+1)^k$ und eine Teilfolge (η_{n_m}) von (η_m) mit

$$a_{k+1,\rho}^{(n_m)}(f, \eta_{n_m}) \leqslant w^{-n_m}$$

und damit

$$d_{j,\rho}^{(n_m)}(f, \eta_{n_m}) \leqslant w^{-n_m} \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant k+1,$$

sowie

$$m_f(\eta_{n_m}\rho^{k-1}) \leqslant 2w^{-n_m} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen $1 < s = M(\rho+1) < w$ und sehen wie im Falle $k = 1$, dass für die beste Approximation $p_{n_m} \in \Pi_{n_m}$ an f auf

$$[\eta_{n_m}\rho^{k-2}, \eta_{n_m}\rho^k] \quad \text{gilt} \quad |p_{n_m}(z)| \leqslant 3(s/w)^{n_m},$$

falls $z \in \mathscr{E}(\eta_{n_m}\rho^{k-1}, \eta_{n_m}\rho^k, s)$.

Man rechnet nun leicht nach, dass sowohl

$$\eta_{n_m}\rho^{k-2} \in \mathscr{E}(\eta_{n_m}\rho^{k-1}, \eta_{n_m}\rho^k, s)$$

als auch

$$\eta_{n_m}\rho^{k} \in \mathscr{E}(\eta_{n_m}\rho^{k-1}, \eta_{n_m}\rho^k, s)$$

gilt, und deshalb auch

$$[\eta_{n_m}\rho^{k-2}, \eta_{n_m}\rho^k] \subseteq \mathscr{E}(\eta_{n_m}\rho^{k-1}, \eta_{n_m}\rho^k, s)$$

Es folgt $m_f(\eta_{n_m}\rho^{k-2}) \leqslant 4(s/w)^{n_m}$ und damit

$$a_{k,\rho}^{(n_m)}(f, \eta_{n_m}) \leqslant 4(s/w)^{n_m} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

also schliesslich

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) \leqslant s/w < (1/M(\rho)) \cdot (1/M(\rho+1))^{k-1},$$

im Widerspruch zur Induktionsannahme, womit die Behauptung gezeigt ist.

Für beliebiges $q > M(\rho)\, M(\rho+1)^{k-1}$ erhalten wir also bei hinreichend grossem n: $a_{k,\rho}^{(n)}(f) > q^{-n}$, das heisst die Konvergenzgeschwindigkeit ist bestenfalls geometrisch. Insbesondere ist es deshalb bei nicht-konstanten Funktionen gerechtfertigt,

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) = 1/q_{k,\rho}(f)$$

zu setzen, wobei stets $1 \leqslant q_{k,\rho}(f) < \infty$ gilt.

3. Bedingungen für geometrische Approximierbarkeit

Ganze Funktionen, deren Restriktion auf $[0, \infty[$ zulässig ist, nennen wir "zulässig-ganz" und bezeichnen auch $f_{|[0,\infty[}$ mit f. Setzen wir weiterhin $M_f(r) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|$, so gilt das folgende hinreichende Kriterium:

Satz 4. *Es sei f eine zulässig-ganze Funktion mit den Eigenschaften:*

(i) *Es existieren $\beta, \gamma, \sigma > 0$ mit*

$$M_f(r) \leqslant \gamma e^{\beta r^\sigma} \qquad \textit{für alle} \quad r \geqslant 0.$$

(ii) *Es existieren $\beta', \gamma' > 0$ mit*

$$m_f(r) \leqslant \gamma' e^{-\beta' r^\sigma} \qquad \textit{für alle} \quad r \geqslant 0.$$

Dann ist f für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ geometrisch approximierbar.

Beweis. Für beliebiges $\eta > 0$ gilt

$$d_{2,\rho}(f, \eta) \leqslant m_f(\eta/\rho) \leqslant \gamma' e^{-\beta' \rho^{-\sigma} \eta^\sigma}.$$

Weiterhin ist für $s > 1$ nach [2, S.84]:

$$\begin{aligned} d_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta) &= E_n(f((\eta/2)(1+t))) \\ &\leqslant 2(s-1)^{-1} s^{-n} M_f(\eta, s) \\ &\leqslant 2\gamma(s-1)^{-1} s^{-n} e^{\beta(\eta/2(1+s))^\sigma}. \end{aligned}$$

Wählt man ein $\delta \in]0, 2[$ mit

$$\delta/2 e^{\beta(1+\delta/2)^\sigma} = e^{-\beta' \rho^{-\sigma} \delta^\sigma},$$

so folgt mit $\eta_n = \delta n^{1/\sigma}$ und $s = 2/\delta > 1$, dass $a_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta_n) \leqslant c e^{-\beta' \rho^{-\sigma} \delta^\sigma \cdot n}$ gilt, wobei wir $c = \max(2\gamma\delta/(2-\delta), \gamma')$ setzen.

Insgesamt folgt:

$$\limsup_{n \to \infty} \alpha_{k,\rho}^{(n)}(f) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \alpha_{1,\rho}^{(n)}(f) \leqslant e^{-\beta' \rho^{-\sigma} \delta^\sigma} < 1.$$

Bedingung (i) in Satz 4 besagt, dass für die Ordnung von f gilt:

$$\operatorname{ord}(f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} < \infty.$$

Um die Notwendigkeit dieser Bedingung für geometrische Konvergenz zu zeigen, formulieren wir zunächst:

LEMMA 1. *Es sei f eine nicht-konstante, zulässig-ganze und k-fach geometrisch approximierbare Funktion. Weiter sei $1 < s < q_{k,\rho}(f)$. Dann existiert ein $c > 0$ mit*

$$M_f(r\rho^{2-k}, s) \cdot m_f(r) \leqslant c \qquad \textit{für alle} \quad r \geqslant 0.$$

Beweisidee. Sei $1 < s < q < q_{k,\rho}(f)$. Für $n \geqslant n_0$ ist dann $a_{k,\rho}^{(n)}(f) < q^{-n}$. Setzt man für $n \geqslant n_0$

$$M_n = \{\eta \geqslant 0;\, d_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta) \leqslant q^{-n} \text{ und } d_{k+1,\rho}(f, \eta) \leqslant q^{-n}\},$$

so ist M_n nicht leer und mit $\eta_n = \inf M_n$ ist die Folge (η_n) monoton wachsend. Weiterhin ist $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \infty$. Unter Verwendung klassischer Bernsteinscher Methoden, wie man sie etwa in [2, S. 85–S. 86] findet, kann man zeigen, dass für passendes $c_s > 0$ gilt

$$M_f(\eta_n, s) \leqslant c_s s^n.$$

Man wähle nun für hinreichend grosses $r > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\eta_{n-1}\rho^{k-2} \leqslant r \leqslant \eta_n \rho^{k-2}.$$

Die Kombination der Ungleichungen

$$M_f(r\rho^{2-k}, s) \leqslant M_f(\eta_n, s) \leqslant c_s s^n$$

sowie

$$m_f(r) \leqslant m_f(\eta_{n-1}\rho^{k-2}) \leqslant 2/q^{n-1}$$

führt dann mit passendem $c \geqslant 2sc_s$ zu der Behauptung.

Nun können wir zeigen:

SATZ 5. *Eine k-fach geometrisch approximierbare Funktion ist konstant oder zu einer ganzen Funktion von endlicher Ordnung erweiterbar.*

Beweis. Sei f nicht-konstant. Wir konstruieren ein $\alpha > 1$, so dass für passende Konstanten $c_{1,2} > 0$ gilt:

$$m_f(r) \geqslant c_1 m_f(r/\alpha)^{c_2}.$$

Zunächst setzen wir

$$s = \begin{cases} M(\sqrt{\rho}), \text{ falls } q_{k,\rho}(f) > M(\sqrt{\rho}), \\ \text{beliebig aus }]1, q_{k,\rho}(f)[, \text{ sonst} \end{cases}$$

und wählen $1 < s < q < q_{k,\rho}(f)$.

Für grosses n ist dann die Menge

$$M_n = \{\eta \geqslant 0;\ \max_{1 \leqslant m \leqslant k+1} d^{(n)}_{m,\rho}(f, \eta) \leqslant q^{-n}\}$$

nicht leer und mit $\eta_n = \inf M_n \in M_n$ gibt es ein $j \geqslant 2$ mit $d^{(n)}_{j,\rho}(f, \eta_n) = q^{-n}$.

Im Falle $j = k+1$ ist

$$m_f(\eta_n/\rho) \geqslant m_f(\eta_n \rho^{k-2}) \geqslant d_{k+1,\rho}(f, \eta_n) = q^{-n}.$$

Andernfalls folgt

$$\begin{aligned} m_f(\eta_n/\rho) &\geqslant d_{2,\rho}(f, \eta_n) \geqslant E_0(f, [\eta_n \rho^{j-3}, \eta_n \rho^{j-1}]) \\ &\geqslant d^{(n)}_{j,\rho}(f, \eta_n) = q^{-n}, \end{aligned}$$

also in jedem Fall

$$m_f(\eta_n/\rho) \geqslant q^{-n} \geqslant m_f(\eta_n \rho^{k-2}).$$

Infolge der Stetigkeit von m_f erhalten wir ein $\rho_n \in [\rho^{-1}, \rho^{k-2}]$ mit $m_f(\eta_n \rho_n) = q^{-n}$.

Mit $\mu(s) = (1/2)(1 + (1/2)(s + 1/s)) > 1$ setzen wir nun

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{\rho}, \text{ falls } q_{k,\rho}(f) > M(\sqrt{\rho}), \\ \min(\sqrt{\rho}, (\mu(s) - \sqrt{\rho}(\mu(s) - 1))^{-1}), \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\alpha > 1$. Wählen wir $j \in \{-1, ..., k-3\}$ so, dass

$$\rho^j \leqslant \rho_n \leqslant \rho^{j+1},$$

so unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall I. $\rho^j \leqslant \rho_n < \rho^{j+1/2}$. Sei p_n beste Approximation an f auf $[\eta_n \rho^{j-1}, \eta_n \rho^{j+1}]$ bezüglich Π_n. Dann ist

$$\| p_n - f \|_{[\eta_n \rho^{j-1}, \eta_n \rho^{j+1}]} \leqslant q^{-n} \qquad \text{und} \qquad m_f(\eta_n \rho_n) = q^{-n};$$

also

$$\| p_n \|_{[\eta_n \rho_n, \eta_n \rho^{j+1}]} \leqslant 2/q^n.$$

Transformation ergibt

$$| p_n(\eta_n/2((\rho^{j+1} - \rho_n)t + \rho^{j+1} + \rho_n))| \leqslant 2/q^n \qquad \text{für} \quad t \in [-1, 1].$$

Mit [2, S. 85] ergibt sich deshalb

$$| p_n(z)| \leqslant 2(s/q)^n \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathscr{E}(\eta_n \rho_n, \eta_n \rho^{j+1}, s).$$

Der Schnitt dieser Ellipse mit der reellen Achse ergibt für

$$r_n = \eta_n(\rho_n \mu(s) - \rho^{j+1}(\mu(s) - 1)) < \eta_n \rho_n,$$

dass

$$|p_n(t)| \leqslant 2(s/q)^n \qquad \text{für} \quad r_n \leqslant t \leqslant \eta_n \rho^{j+1}.$$

Ist nun $r_n \leqslant \eta_n \rho^{j-1}$ (was für $q > M(\sqrt{\rho})$ wegen $r_n \leqslant 0$ stets der Fall ist), erhält man

$$\| p_n \|_{[\eta_n \rho^{j-1}, \eta_n \rho^{j+1}]} \leqslant 2(s/q)^n$$

und deshalb

$$\| f \|_{[\eta_n \rho^{j-1}, \eta_n \rho^{j+1}]} \leqslant 3(s/q)^n,$$

woraus wegen $m_f(\eta_n \rho_n) = q^{-n}$ folgt, dass

$$m_f(\eta_n \rho^{j-1}) \leqslant 3(s/q)^n \text{ gilt.}$$

Wir notieren zusätzlich die Abschätzung

$$\eta_n \rho_n / \eta_n \rho^{j-1} \geqslant \rho > \sqrt{\rho} \geqslant \alpha > 1.$$

Ist aber $r_n > \eta_n \rho^{j-1} > 0$, so ist insbesondere $q \leqslant M(\sqrt{\rho})$ und es gilt: $m_f(r_n) \leqslant 3(s/q)^n$.

Weiterhin ist hier

$$\eta_n \rho_n / r_n \geqslant (\mu(s) - \sqrt{\rho}(\mu(s) - 1))^{-1} \geqslant \alpha > 1.$$

Fall II. $\rho^{j+1/2} \leqslant \rho_n \leqslant \rho^{j+1}$. Nun sei p_n beste Approximation an f auf $[\eta_n \rho^j, \eta_n \rho^{j+2}]$ bezüglich Π_n. Dann ist

$$\| p_n - f \|_{[\eta_n \rho^j, \eta_n \rho^{j+2}]} \leqslant q^{-n} \qquad \text{and} \qquad m_f(\eta_n \rho_n) = q^{-n}.$$

Geht man analog zum Fall I vor, so erhält man für

$$r_n = \eta_n(\rho_n \mu(s) - \rho^{j+2}(\mu(s) - 1)) < \eta_n \rho_n$$

die Abschätzung

$$|p_n(t)| \leqslant 2(s/q)^n, \qquad \text{falls} \quad r_n \leqslant t \leqslant \eta_n \rho^{j+2}.$$

Falls $r_n \leqslant \eta_n \rho^j$ (was wieder für $q > M(\sqrt{\rho})$ stets zutrifft), folgt

$$\| f \|_{[\eta_n \rho^j, \eta_n \rho^{j+2}]} \leqslant 3(s/q)^n$$

und somit $m_f(\eta_n \rho^j) \leqslant 3(s/q)^n$, wobei zusätzlich gilt

$$(\eta_n \rho_n)/(\eta_n \rho^j) \geqslant \sqrt{\rho} > \alpha > 1.$$

Hingegen ergibt sich für $r_n > \eta_n \rho^j$, dass $q \leqslant M(\sqrt{\rho})$ und

$$m_f(r_n) \leqslant 3(s/q)^n.$$

Dabei ist

$$\eta_n \rho_n / r_n \geqslant (\mu(s) - \rho(\mu(s) - 1))^{-1} \geqslant \alpha > 1.$$

Wir erhalten demnach in jedem Fall eine Folge (r'_n) mit den Eigenschaften: $\eta_n \rho_n / r'_n \geqslant \alpha > 1$ und $m_f(r'_n) \leqslant 3(s/q)^n$ für hinreichend grosses n. Wählt man weiterhin ein beliebiges $1 < q_1 < q/s$ und setzt $\gamma_n = \eta_n \rho_n$, so folgt:

$$m_f(\gamma_n/\alpha) = m_f(\eta_n \rho_n/\alpha) \leqslant m_f(r'_n) \leqslant 3(s/q)^n \leqslant q_1^{-n},$$

falls n gross genug ist. Also existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$q^{-n} = m_f(\gamma_n) \leqslant m_f(\gamma_n/\alpha) \leqslant q_1^{-n} \qquad \text{für} \quad n \leqslant n_1.$$

Wegen $m_f(\gamma_n) > m_f(\gamma_{n+1})$ und der Monotonie von m_f ist $(\gamma_n)_{n \geqslant n_1}$ streng monoton wachsend. Wir nehmen an, (γ_n) sei beschränkt. Dann gibt es ein $\gamma > 0$ mit $\gamma = \lim_{n \to \infty} \gamma_n$. Es folgt

$$0 \leqslant m_f(\gamma/\alpha) = \lim_{n \to \infty} m_f(\gamma_n/\alpha) \leqslant \lim_{n \to \infty} q_1^{-n} = 0.$$

Andererseits existiert ein n_2, so dass für $n \geqslant n_2$ gilt

$$\gamma/\alpha < \gamma_n < \gamma,$$

und deshalb auch

$$0 = m_f(\gamma/\alpha) \geqslant m_f(\gamma_n) = q^{-n} > 0,$$

woraus ein Widerspruch folgt.

Wir erhalten infolge der Monotonie von (γ_n), dass $\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \infty$, und mit $\eta_n \rho^{k-2} \geqslant \gamma_n$ gilt $\lim_{n \to \infty} \eta_n = \infty$.

Die Fortsetzbarkeit von f zur ganzen Funktion lässt sich nun leicht zeigen. Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ hinreichend gross. Wegen $\eta_n \to \infty$ gibt es ein n', so dass für alle $n \geqslant n'$ gilt: $\eta_n \geqslant \eta_m$ und damit auch

$$E_n(f, [0, \eta_m]) \leqslant E_n(f, [0, \eta_n]) \leqslant q^{-n}.$$

Nach [2, S. 85] lässt sich deshalb f holomorph auf das Innere von

$\mathscr{E}(0, \eta_m, q)$ fortsetzen. Da m beliebig war und wegen $\eta_n \to \infty$ gilt: $\mathbb{C} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathscr{E}(0, \eta_m, q)$, ist f zu einer ganzen Funktion erweiterbar.

Die behauptete Ungleichung über $m_f(r)$ und $m_f(r/\alpha)$ beweisen wir mit Hilfe der Folge (γ_n). Seien dazu $r_0 > 0$ hinreichend gross, $r \geqslant r_0$ und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\gamma_n \leqslant r \leqslant \gamma_{n+1}$. Dann ist $0 < m_f(\gamma_n/\alpha) \leqslant q_1^{-n}$, also

$$n \leqslant \log((m_f(\gamma_n/\alpha))^{-1})/\log q_1.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} m_f(r) &\geqslant m_f(\gamma_{n+1}) \\ &\geqslant q^{-1} q^{-\log((m_f(\gamma_n/\alpha))^{-1})/\log q_1} \\ &\geqslant q^{-1} m_f(r/\alpha)^{\log q/\log q_1}. \end{aligned}$$

Definieren wir $h(r) = 1/m_f(r)$ und $p = \log q/\log q_1 > 1$, so ergibt sich $h(r) \leqslant q h^p(r/\alpha)$, falls $r \geqslant r_0$. Induktiv zeigt man, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $r \geqslant \alpha^{m-1} r_0$ gilt

$$h(r) \leqslant q^{1 + \cdots + p^{m-1}} \cdot h^{p^m}(r/\alpha^m)$$

und deshalb mit $\beta = q^{1/(p-1)} > 1$:

$$h(r) \leqslant (\beta h(r/\alpha^m))^{p^m}.$$

Sei nun $r \geqslant r_0$ und $m_r = \max(n \in \mathbb{N}\,;\, r \geqslant \alpha^{n-1} r_0)$. Dann ist $\alpha^{m_r} \geqslant r/r_0 \geqslant \alpha^{m_r - 1}$ und daher

$$\begin{aligned} \log\log h(r) &\leqslant \log(p^{m_r} \log(\beta h(r/\alpha^{m_r}))) \\ &\leqslant m_r \log p + \log\log(\beta h(r_0)), \end{aligned}$$

da h monoton steigt. Ausserdem gilt

$$\log r \geqslant (m_r - 1)\log\alpha + \log r_0.$$

Damit erhält man

$$\frac{\log\log h(r)}{\log r} \leqslant \frac{\log p + \log(\log(\beta h((r_0))))/m_r}{\log\alpha \cdot (m_r - 1)/m_r + (\log r_0)/m_r},$$

also

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log\log 1/m_f(r)}{\log r} \leqslant \log p/\log\alpha < \infty,$$

da mit $r \to \infty$ auch $m_r \to \infty$ geht.

Aus Lemma 1 folgt nun

$$\operatorname{ord}(f) \leqslant \log p / \log \alpha < \infty$$

und der Satz ist bewiesen.

Aus dem Beweis von Satz 5 ergibt sich die nachstehende Abschätzung.

KOROLLAR 1. *Für k-fach geometrisch approximierbares f gibt es* α, $p > 1$ *und* $0 < c < 1$ *mit*

$$m_f(r) \geqslant c m_f(r/\alpha)^p \qquad \text{für alle} \quad r \geqslant 0.$$

Korollar 1 erlaubt es, die Anzahl der Segmentierungen und den Parameter $\rho > 1$ beliebig zu variieren, ohne die geometrische Konvergenzgeschwindigkeit zu verlieren. Man kann daher generell von "geometrischer Approximierbarkeit" sprechen.

SATZ 6. *Es seien* k, $k' \in \mathbb{N}$ *und* $\rho, \rho' > 1$. *Weiter sei* f *eine bezüglich* ρ *k-fach geometrisch approximierbare Funktion. Dann ist* f *bezüglich* $\rho' k'$*-fach geometrisch approximierbar.*

Beweis. Es genügt, den Fall $k' = 1$ zu betrachten. Sei dazu $1 < q < q_{k,\rho}(f)$ und gelte für $n \geqslant n_1$:

$$a_{k,\rho}^{(n)}(f, \eta_n) \leqslant q^{-n}.$$

Man wähle α, p, c nach Korollar 1. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\rho^{k-2}/\alpha^m \leqslant 1/\rho'.$$

Analog zum Beweis von Satz 5 zeigt man für hinreichend grosses r und passendes $\beta > 0$:

$$m_f(r/\alpha^m) \leqslant \beta m_f(r)^{1/p^m}.$$

Setzt man für grosses n $r = \eta_n \rho^{k-2}$, so ergibt sich

$$a_{1,\rho'}^{(n)}(f, \eta_\eta) \leqslant \beta'/q_1^n,$$

mit $q_1 = q^{1/p^m} > 1$ und passendem $\beta' > 0$.

Die Notwendigkeit von Begingung (ii) aus Satz 4 liefert

SATZ 7. *Für geometrisch approximierbares f gibt es* $\gamma' > 0$ *und* $\sigma' > 0$, *so dass für alle* $r \geqslant 0$ *gilt*

$$m_f(r) \leqslant \gamma' e^{-r^{\sigma'}}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass für passendes $c > 0$, $\alpha_1 > 1$ und $p_1 > 1$ gilt: $m_f(r) \leqslant c_1 \cdot m_f(r/\alpha_1)^{p_1}$. Seien dazu $1 < q < q_{1,\rho}(f)$ und

$$\eta_n = \inf(\eta \geqslant 0;\, a_{1,\rho}^{(n)}(f, \eta) \leqslant q^{-n}).$$

Dann ist $m_f(\eta_n/\rho) \geqslant q^{-n} \geqslant 1/2m_f(\eta_n/\rho)$. Wählt man $\rho' > \rho$ und $q_1 > 1$ mit $1 < M(\rho') < q_1 < q$, so gilt nach Satz 3

$$\liminf_{n \to \infty} \alpha_{1,\rho'}^{(n)}(f) \geqslant M(\rho')^{-1} > q_1^{-1} > q^{-1}.$$

Für hinreichend grosses n folgt:

$$d_{2,\rho'}(f, \eta_n) \geqslant d_{2,\rho}(f, \eta_n) = q^{-n} \geqslant d_{1,\rho'}^{(n)}(f, \eta_n)$$

und damit auch

$$m_f(\eta_n/\rho') \geqslant d_{2,\rho'}(f, \eta_n) = a_{1,\rho'}^{(n)}(f, \eta_n) \geqslant q_1^{-n}.$$

Mit $\gamma_n = \eta_n/\rho$ und $\alpha_1 = \rho'/\rho$ ergibt sich daher

$$m_f(\gamma_n) \leqslant 2/q^n \qquad \text{und} \qquad m_f(\gamma_n/\alpha_1) \geqslant q_1^{-n}.$$

In Analogie zum Beweis von Satz 5 folgt mit $p_1 = \log q/\log q_1 > 1$, dass

$$m_f(r) \leqslant 2q m_f(r/\alpha_1)^{p_1}.$$

Wieder analog zu Satz 5 folgt

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\log\log(1/m_f(r))}{\log r} \geqslant \log p_1/\log \alpha_1 > 0,$$

und damit gibt es ein $\sigma' > 0$ mit $1/m_f(r) \geqslant e^{r^{\sigma'}}$ für hinreichend grosses $r \geqslant 0$. Mit passendem $\gamma' > 0$ folgt die Behauptung.

BEMERKUNG. Mit Hilfe von Satz 3 kann man für $\sigma > \operatorname{ord}(f)$ und passendes $\gamma > 0$ zeigen, dass $m_f(r) \geqslant \gamma e^{-r^{\sigma}}$ gilt. Hieraus folgt für σ' aus Satz 7: $0 < \sigma' \leqslant \operatorname{ord}(f)$, also insbesondere $\operatorname{ord}(f) > 0$.

Verzichtet man nun darauf, geometrische Konvergenz mit Hilfe von Ordnungsaussagen charakterisieren zu wollen, so erhält man aus Satz 6 eine einfache äquivalente Bedingung.

SATZ 8. *Für eine zulässige Abbildung f sind äquivalent:*

TABELLE I

$f(x) = e^{-x}$; $\rho = 2$

n	η_n	$a_{1,2}^{(n)}(f)$	$a_{1,2}^{(n)}(f)/a_{1,2}^{(n+1)}(f)$
1	2.58500	0.13729	2.15222
2	4.11808	0.06379	2.09353
3	5.59547	0.03047	2.05878
4	7.04012	0.01480	2.03857
5	8.46342	0.00726	2.02228
6	9.87179	0.00359	2.00559
7	11.26952	0.00179	2.01124
8	12.65902	0.00089	

(i) *f ist geometrisch approximierbar.*

(ii) *f ist Restriktion einer ganzen Funktion und es gibt ein $s > 1$, so dass $M_f(r, s) \cdot m_f(r)$ für $r \to \infty$ beschränkt ist.*

Beweis. Sei f nicht-konstant.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Satz 6 und Lemma 1 gibt es $s > 1$ und $c > 0$ mit $M_f(r, s) \leqslant M_f(r\rho, s) \leqslant c/m_f(r)$ für alle $r \geqslant 0$.

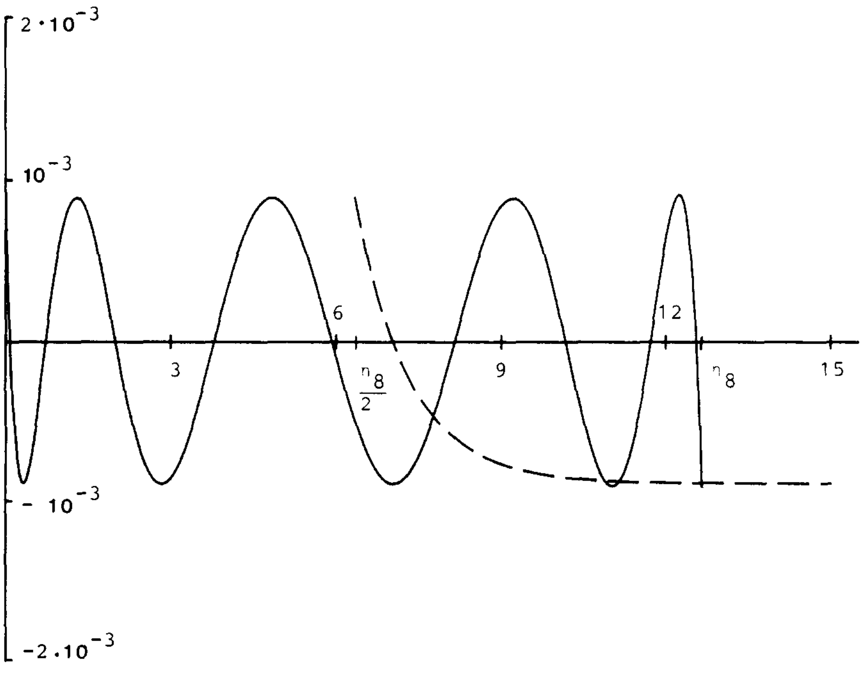

FIG. 1. Fehlerkurven für $n = 8$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $1 < q < s$. Da f nicht konstant ist, gibt es für grosses n ein $\eta_n > 0$ mit $m_f(\eta_n) = q^{-n}$. Nach [2, S. 84] gilt:

$$\begin{aligned} E_n(f, [0, \eta_n]) &\leqslant 2(s-1)^{-1} s^{-n} M_f(\eta_n, s) \\ &\leqslant 2c(s-1)^{-1} s^{-n}/m_f(\eta_n) \\ &= 2c(s-1)^{-1}(q/s)^n. \end{aligned}$$

Folglich ist $q_{1,1}(f) \geqslant \min(q, s/q) > 1$ und mit ähnlichen Methoden wie in Lemma 1 kann man die Existenz eines $\rho > 1$ zeigen, so dass $q_{1,\rho}(f) > 1$ gilt. Aus Satz 6 folgt dann die Behauptung.

Zur Illustration geben wir für $f(x) = e^{-x}$ einige Minimalabweichungen sowie die Quotienten

$$a_{1,2}^{(n)}(f)/a_{1,2}^{(n+1)}(f)$$

an, die als Näherung für $q_{1,2}(f)$ betrachtet werden können (Tabelle I, Abbildung 1).

Literatur

1. F. R. Gantmacher, "Matrizenrechnung Teil I" VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.
2. G. Meinardus, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung," Springer-Verlag, Berlin, 1964.
3. G. Meinardus, A. Reddy, G. Taylor, und R. Varga, Converse theorems and extensions in chebyshev rational approximation to certain entire functions in $[0, \infty[$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **170**, August 1972.
4. Th. Riessinger, "Überlappungsapproximation auf $[0, \infty[$," Dissertation, Universität Mannheim, 1987.